



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

07F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۳۱

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	سید جواد نظری
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنونند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- اگر $x = 5 + \sqrt{17}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x}$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{9}{16}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

از عبارت $\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x}$ شروع می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{\frac{x^2 - x + 8}{16x}} = \sqrt{\frac{x^2 + 8 - x}{16x}}$$

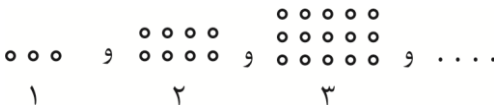
از طرفی:

$$(x-5)^2 = 17 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 17 \Rightarrow x^2 + 8 = 10x$$

اگر در حکم جایگزین کنیم، داریم:

$$= \sqrt{\frac{10x - x}{16x}} = \sqrt{\frac{9x}{16x}} = \frac{3}{4}$$

۲- با توجه به الگوی مقابل اختلاف تعداد دایره‌ها در شکل نهم و دهم چه عددی است؟



۲۴ (۲)

۲۳ (۱)

۲۵ (۴)

۲۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

اگر اندکی دقت کنید، جدول مقابل به دست می‌آید:

شماره مرحله	۱	۲	۳
تعداد دایره	1×3	2×4	3×5
	$a_1 = 1 \times 12$		
	$a_9 = 9 \times 11$		
اختلاف	$120 - 99 = 21$		

۳- هرگاه A مجموعه ۶ عضوی و $(A \cup B) - (A \cap B)$ مجموعه ۹ عضوی باشد. حداکثر و حداقل تعداد اعضای مجموعه B کدام می‌تواند باشد؟

۳، ۹ (۴)

۳، ۱۵ (۳)

۶، ۱۵ (۲)

۶، ۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



اگر از نمودار ون کمک بگیریم، آنگاه حل ساده‌تر می‌شود.

ابتدا فرض می‌کنیم $n(A \cap B) = x$.

تعداد اعضای $(A \cup B) - (A \cap B)$ برابر با ۹ است، پس:

$$6 - x + x + y - x = 9 \Rightarrow y - x = 3$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



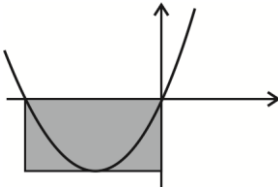
از طرفی $n(B) = x + y$ ، پس با جایگزینی $y = x + 3$ داریم:

$$n(B) = 2x + 3$$

اما دقت کنید $0 \leq x \leq 6$ پس:

$$3 \leq n(B) \leq 15$$

۴- شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x) = (a+4)x^2 + 8x$ با محور تقارن $x=a$ می باشد. مساحت مستطیل رنگی کدام است؟



۱۶ (۱)

۳۲ (۲)

۱۲ (۳)

۲۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار، یکی از ریشه ها $x=0$ و یکی دیگر $x = -\frac{8}{a+4}$ است.

چون $x=a$ محور تقارن سهمی است، پس:

$$\frac{-8}{a+4} + 0 = 2a \Rightarrow a(a+4) = -4$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \text{ ریشه ها هستند.}$$

$$f(x) = 2x^2 + 8x \Rightarrow S \begin{cases} -2 \\ -8 \end{cases}$$

در این صورت مساحت مستطیل رنگی $4 \times 8 = 32$ است.

۵- هرگاه θ زاویه خط $4x - 3y + 2 = 0$ با جهت مثبت محور عرض ها باشد، مقدار $A = \frac{26}{2 + 5 \cos^2 \theta}$ چه عددی است؟

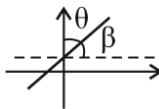
۵ (۴)

 $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اگر خط را به صورت $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ بنویسیم، آنگاه β زاویه خط با جهت مثبت محور x ها می باشد.

$$\tan \beta = \frac{4}{3}$$



اما θ و β متمم یکدیگر هستند.

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot \beta = \frac{3}{4}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با توجه به اتحاد داریم:

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$A = \frac{26}{2 + 5 \times \frac{16}{25}} = \frac{26}{2 + \frac{16}{5}} = \frac{26}{\frac{26}{5}} = 5$$

۶- تعداد اعداد ۴ رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۲ باشد چه تعدادی است؟

۱۵۱۲ (۴)

۲۰۱۶ (۳)

۱۸۴۸ (۲)

۲۶۸۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

بهتر است ابتدا آنهایی که رقم ۲ ندارند را یافته از کل کم کنیم:

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام}$$

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون رقم ۲ (بدون تکرار)}$$

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 - 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 8 \times 7 (81 - 48) = 56 \times 33 = 1848$$

۷- نمودار تابع $y = 3|x| + |x - 3|$ خط $y + x = 6$ را در نقاط A و B قطع می کند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

۳ (۴)

۴√۲ (۳)

۲ (۲)

۲√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

برای یافتن نقاط برخورد دو نمودار، معادله $6 - x = 3|x| + |x - 3|$ را حل می کنیم. (هم می توانیم از رسم کمک بگیریم و هم می توانیم حالت بندی کنیم)

$$x \geq 3: 6 - x = 3x + x - 3 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$$

با توجه به شرط $x \geq 3$ غیر قابل قبول است.

$$0 \leq x < 3 \quad -x + 6 = 3x - x + 3 \Rightarrow x = 1 \quad A \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow -x + 6 = -3x + 3 - x \Rightarrow x = -1 \quad B \begin{cases} -1 \\ 7 \end{cases}$$

با یافتن دو نقطه برخورد:

$$AB = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۸- دو نقطه روی خط $y = x + 1$ یافت می شوند که فاصله آنها تا خط $4x - 3y = 2$ برابر $\frac{2}{5}$ است. فاصله دو نقطه تا یکدیگر

چقدر است؟

۴√۲ (۴)

۴ (۳)

۲√۲ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



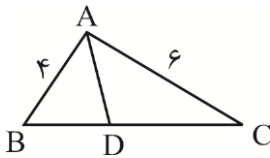
نکته: فاصله $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر $d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

ابتدا نقطه فرضی $A(\alpha, \alpha + 1)$ را روی خط در نظر می‌گیریم. فاصله آن را تا $4x - 3y - 2 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|4\alpha - 3(\alpha + 1) - 2|}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow |\alpha - 5| = 2$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \alpha = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} A \\ A' \end{array} \Rightarrow AA' = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

۹- در شکل زیر اگر AD نیم‌ساز باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABD است؟



- (۱) ۲/۲۵
(۲) ۲/۵
(۳) ۲
(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

نکته: وقتی AD نیم‌ساز باشد، آنگاه طبق قضیه نیم‌سازها، $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. چون AD نیم‌ساز است، اگر فرض کنیم $BD = x$ آنگاه:

$$\frac{x}{4} = \frac{DC}{6} \Rightarrow DC = \frac{3}{2}x$$

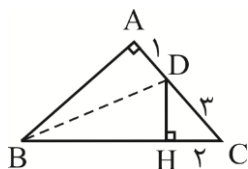
اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد، با نوشتن مساحت‌ها داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot \left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD = \frac{1}{2} AH(x)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{5}{4} \cdot x \cdot AH}{\frac{1}{2} x \cdot AH} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۱۰- در شکل روبه‌رو، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. اندازه پاره خط BD چقدر است؟



- (۱) $\sqrt{13}$
(۲) $\sqrt{19}$
(۳) $\sqrt{21}$
(۴) $\sqrt{14}$

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



دو مثلث قائم الزویه ABC و DHC متشابه هستند، پس $\hat{B} = \hat{D}$ و داریم:

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{BC}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow BC = 6$$

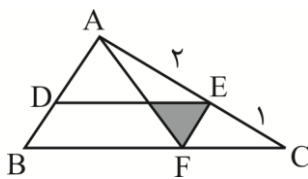
از طرفی در مثلث قائم الزویه DHC طبق فیثاغورس داریم:

$$DH^2 = 9 - 4 \Rightarrow DH = \sqrt{5}$$

و در مثلث قائم الزویه BDH داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BD^2 = DH^2 + BH^2 \\ BC = 6, HC = 2 \Rightarrow BH = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow BD = \sqrt{5 + 16} = \sqrt{21}$$

۱۱- هرگاه چهار ضلعی DEFB متوازی الاضلاع باشد، نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



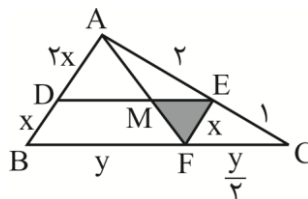
- ۱۲ (۱)
۱۵ (۲)
۱۲/۵ (۳)
۱۳/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

از این که چهار ضلعی متوازی الاضلاع است، نتیجه می گیریم که $DE = BF$ و $EF = DB$.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

با توجه به قضیه تالس در مثلث ABC:



$$\frac{2}{3} = \frac{y}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3}{2}y \Rightarrow FC = \frac{y}{2}$$

از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث AFC:

$$\frac{ME}{FC} = \frac{2}{3} \Rightarrow ME = \frac{2}{3} \times \frac{y}{2} = \frac{y}{3}$$

در متوازی الاضلاع $\hat{B} = \hat{E}$ پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3y}{2} \sin \hat{B}$$

$$S_{EMF} = \frac{1}{2} EM \cdot FE \cdot \sin \hat{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot x \cdot \sin \hat{E}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت ها} = \frac{\frac{1}{2} xy}{\frac{1}{2} xy} = \frac{27}{2} = 13/5$$

۱۲- هرگاه میانگین ۲، ۳، ۴، ۳، ۲، ۲، ۳ برابر ۳ باشد، انحراف معیار آنها کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



چون میانگین آنها ۳ است، پس $3 = \frac{2a+2+a+3+3+4}{6}$ ، پس $18 = 3a + 12$ ، یعنی $a = 2$ ، حال واریانس داده‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\text{واریانس} = \frac{(4-3)^2 + (2-3)^2 + (2-3)^2 + 0 + 0 + (4-3)^2}{6}$$

$$\text{واریانس} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۳- هرگاه $f = \{(-2, 3)(1, 2)(-1, 4)(2, 5)\}$ و $g(x) = 3f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ به طوریکه $f(a) = g^{-1}(6)$ ، مقدار a چه عددی است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

برای آن که راحت تر بتوانیم به a برسیم، در ابتدا فرض می‌کنیم $g^{-1}(6) = k$ و داریم:

$$g^{-1}(6) = k \Rightarrow g(k) = 6 \Rightarrow 3f\left(\frac{k-1}{2}\right) = 6$$

$$\text{در این صورت: } f\left(\frac{k-1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{k-1}{2} = 1 \Rightarrow k = 3$$

$$\text{به این ترتیب: } g^{-1}(6) = 3 \Rightarrow f(a) = 3$$

$$\text{در نتیجه: } f(a) = 3 \Rightarrow a = -2$$

۱۴- با فرض آن که $f(x) = x + 2\sqrt{x+1} - 1$ ، نمودار $y = f^{-1}(2x)$ نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{5}{4}$

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۲

قرار است $f^{-1}(2x)$ نیمساز ناحیه اول را قطع کند، یعنی X مورد نظر، جواب معادله $f^{-1}(2x) = x$ است. پس با این مقدمه داریم:

$$f^{-1}(2x) = x \Rightarrow f(x) = 2x$$

$$-1 + x + 2\sqrt{x+1} = 2x \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x + 1$$

$$4(x+1) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

در ناحیه اول، شرط $x > 0$ برقرار است.

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

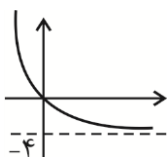
۱۵- نمودار وارون تابع $f(x) = -\log_2(ax+b)$ به صورت روبه‌رو است. مقدار $f^{-1}(-3)$ چه عددی است؟

(۱) ۲۱

(۲) $\frac{14}{3}$

(۳) ۱۴

(۴) ۲۸



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۴

روش اول: وارون تابع را به دست می آوریم:

$$y = -\log_2(ax + b)$$

$$\Rightarrow 2^{-y} = ax + b \Rightarrow x = \frac{2^{-y} - b}{a}$$

با توجه به نمودار، a و b را به دست می آوریم.

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{-x} - b}{a} \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2^0 - b}{a} = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = -4 \Rightarrow \frac{-b}{a} = -4 \Rightarrow b = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-3) = \frac{2^{+3} - 1}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{\frac{1}{4}} = 28$$

روش دوم:

$$f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \log_2 b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = -4 \Rightarrow f(-4) = +\infty \Rightarrow +\infty = -\log_2(-4a + 1) \Rightarrow 2^{-\infty} = -4a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۱۶- در ظرفی ۲۰۰ لیتر از یک محلول داریم. روزانه ۸ لیتر از محلول را برمی داریم و دقیقاً به همان میزان آب خالص درون ظرف

می ریزیم. بعد از طی چند روز غلظت محلول به $\frac{1}{8}$ غلظت اولیه می رسد؟ ($\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.45$)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

چون روزانه ۸ لیتر از محلول برمی داریم و جای آن آب خالص می ریزیم، در واقع غلظت آن $\frac{200-8}{200} = \frac{24}{25}$ برابر شده است.

این غلظت بعد از n روز $\left(\frac{24}{25}\right)^n$ برابر خواهد شد. پس اگر غلظت اولیه A باشد:

$$\frac{1}{8} A = A \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^n \Rightarrow$$

$$\left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{8} \Rightarrow n = \log_{\frac{24}{25}} \frac{1}{8} \Rightarrow n = \frac{\log \frac{1}{8}}{\log \frac{24}{25} - \log 24}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 8}{2 \log 5 - \log 24} = \frac{3 \log 2}{2(1 - \log 2) - 3 \log 2 - \log 3}$$

تذکر: $\log 5 + \log 2 = 1$

$$n = \frac{3 \times 0.3}{2 - 5 \times 0.3 - 0.45} = \frac{0.9}{0.05} = 18$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۷- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x + a\sqrt{x} + b} = 1$ مقدار b کدام است؟

$$\frac{7}{2} \quad (۴)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آن که صورت کسر صفر است و حاصل حد، غیر صفر شده است، بنابراین لازم است مخارج کسر هم صفر شود، پس:

$$1 + a + b = 0$$

فکر کنم تا حالا همگی هویپیتال را برای رفع ابهام آموخته‌اید، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x + a\sqrt{x} + b} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1 + \frac{a}{2\sqrt{x}}} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{a}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2+a}{2}} = \frac{7}{4+2a} = 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2a = 7 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

۱۸- تابع $f(x) = [\frac{4-x}{3}] + a[\frac{x-1}{3}]$ در $x = -2$ پیوسته است، مقدار a کدام است؟

(۴) a یافت نمی‌شود

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

نکته: f در $x = -2$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$

حدود یک طرفه را در $x = -2$ پیدا می‌کنیم:

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} [\frac{4-x}{3}] + a[\frac{x-1}{3}] = 2 + a(-2) = 2 - 2a$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 - a$$

شرط آن که حد داشته باشد آن است که:

$$2 - 2a = 1 - a \Rightarrow a = 1$$

$$\text{اما } f(-2) = 2 + a(-1) = 2 - a$$

در این صورت نمی‌توان عددی برای a پیدا کرد که همزمان سه عبارت $2 - 2a$ و $1 - a$ و $2 - a$ با هم برابر باشند. پس a یافت نمی‌شود.

۱۹- نمودار $f(x) = x^2 + 2x + 6$ را دو واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. نمودار جدید

را چند واحد به سمت راست انتقال دهیم تا بر نمودار $y = f(x)$ منطبق شود؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۴

(۱) ۴

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



مرحله به مرحله پیش می‌رویم.

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{انتقال دهیم}]{\text{۲ واحد به چپ}} y = f(x+2) \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x+2) \\ \xrightarrow[\text{انتقال به راست}]{\text{واحد } k} y = f(-(x-k)+2) = f(k+2-x)$$

چون قرار است بر نمودار f منطبق شود، پس باید:

$$f(x) = f(k+2-x)$$

پس باید محور تقارن سهمی، وسط x و $k+2-x$ باشد.

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow k+2-x = -2 \Rightarrow \underline{k = -4}$$

۲۰- تابع $f(x) = 2x(4-|x|)$ در بازه $(-1, \alpha)$ یکنواست، حداکثر مقدار α کدام است؟

۱ (۴)

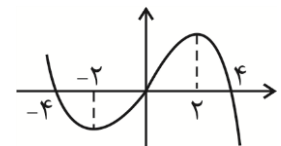
۳ (صفر)

۲ (۴)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر نمودار f را رسم کنیم وضعیت یکنوایی معلوم می‌شود.



یکنوایی تابع f در جدول فوق صدق می‌کند.

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = 2x(4-x)$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = 2x(4+x)$$

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
f	نزولی اکید	صعودی اکید	نزولی اکید	

پس در بازه $(-1, 2)$ صعودی اکید یعنی یکنوای اکید است و حداکثر α برابر ۲ می‌باشد.

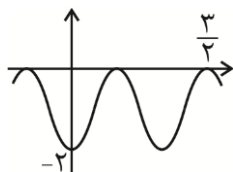
۲۱- بخشی از نمودار $f(x) = a \cos^2 bx$ شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۴)

۴ (۳)



پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل داده شده داریم: $f(0) = -2 \Rightarrow a = -2$

$$f(x) = a \cos^2 bx \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|} \quad \text{از طرفی:}$$

$$\frac{3}{2}T = \frac{3}{2} \rightarrow T = 1 \quad \text{به‌طوریکه در شکل داده شده:}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = 1 \Rightarrow |b| = \pi$$

پس $b = \pm\pi$ و $a = -2$ آنگاه $ab = \pm 2\pi$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۲- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \sin^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۲)$$

$$3\pi \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: روابط $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \beta$ و $\tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = k\pi + \beta$ برقرار هستند.
ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = -\sin x = -2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad \text{پس:}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \Rightarrow S = \frac{7\pi}{2}$$

۲۳- هرگاه $f(x) = \frac{2x-3}{3x+a}$ باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot f^{-1}(x) = 6$ ، مقدار a کدام است؟

$$9 \quad (۴)$$

$$27 \quad (۳)$$

$$-9 \quad (۲)$$

$$-27 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \quad \text{نکته: } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

ابتدا تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{-ax-3}{3x-2}$$

حال حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{3x+a} \cdot \frac{-ax-3}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2ax^2}{9x^2} = \frac{-2a}{9} \Rightarrow \frac{-2a}{9} = 6 \Rightarrow a = -27$$

۲۴- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ باشد، شیب خط مماس بر $y = (x+1)f(x)$ در $x=1$ چه عددی است؟

$$-\frac{11}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای یافتن شیب خط مماس کافی است مقدار مشتق در آن نقطه را بیابیم:

$$y' = f(x) + f'(x)(x+1) \Rightarrow y'(1) = f(1) + 2f'(1)$$

حال $f'(1)$ را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-2) - \sqrt{x}}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-\frac{4}{3}}{1} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{1}{-1} + 2 \times \frac{-4}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$$

۲۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{1+4x-x^2}$ در بازه $[0, 3]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در ابتدای بازه چقدر اختلاف دارد؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

آهنگ متوسط تغییر در بازه $[0, 3]$ برابر $\bar{f} = \frac{f(3)-f(0)}{3}$ است. پس:

$$\bar{f} = \frac{\sqrt{1+12-9}-1}{3} = \frac{1}{3}$$

اما آهنگ لحظه‌ای تغییر در ابتدای بازه همان $f'(0)$ است.

$$f'(x) = \frac{4-2x}{2\sqrt{1+4x-x^2}} \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$\text{اختلاف} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

۲۶- هرگاه نقطه $A(0, 4)$ اکستریم نسبی $f(x) = (x-a)^2(x+b)$ باشد، مقدار $a+b$ چه عددی است؟

-3 (۴) -2 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

پاسخ: گزینه ۲

f یک چند جمله‌ای است، پس مشتق پذیر است، با توجه به آن که $A(0, 4)$ اکستریم نسبی آن است، پس:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a^2b = 4 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(x-a)(x+b) + (x-a)^2 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow -2ab + a^2 = 0 \Rightarrow a(a-2b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{غقی} \\ a=2b \end{cases}$$

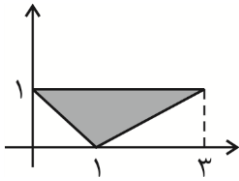
$$\begin{cases} a=2b \\ a^2b=4 \Rightarrow 4b^3=4 \Rightarrow b=1, a=2 \end{cases}$$

پس: $a+b=3$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۷- مثلث رنگ شده را حول محور X ها دوران می دهیم. حجم به دست آمده چه عددی است؟

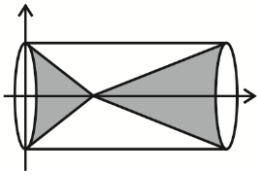


- (۱) 2π
(۲) $\frac{3\pi}{2}$
(۳) π
(۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

اگر مثلث رنگ شده حول محور X ها دوران کند، در واقع می توانیم فرض کنیم از یک استوانه، دو مخروط را حذف کرده ایم.

$$V = \pi \times r^2 h = \pi \times 1^2 \times 3 = 3\pi \text{ استوانه}$$



$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow V_1 + V_2 = \pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ مخروط سمت راست}$$

پس حجم تولید شده $3\pi - \pi = 2\pi$ است.

۲۸- دایره ای با مرکز $O(-3, 1)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ مماس خارج است. شعاع این دایره چند است؟

- (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

قرار است، دو دایره با هم مماس خارج باشند، پس اگر d فاصله دو مرکز باشد، آنگاه: $d = R_1 + R_2$.

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 4$$

$$O_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}, R_1 = 2$$

$$\Rightarrow d = O_1 O_2 = \sqrt{9+16} = 5$$

$$O_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$d = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 5 - 2 = 3$$

۲۹- جمعیت کلاس A سه برابر جمعیت کلاس B است. در کلاس A و کلاس B به ترتیب ۱۰ درصد و ۲۵ درصد دانش آموزان

عینکی هستند، اگر از این جمع فردی عینکی باشد، با کدام احتمال عضو دانش آموزان کلاس B است؟

- (۱) $\frac{25}{55}$ (۲) $\frac{25}{35}$ (۳) $\frac{25}{105}$ (۴) $\frac{25}{140}$

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا احتمال عینکی بودن دانش آموز را مشخص می کنیم:

$$P(\text{عینکی بودن}) = \frac{3}{4} \times \frac{10}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{25}{100} = \frac{55}{400}$$

احتمال آن که عضو کلاس A باشد

احتمال آن که عضو کلاس B باشد

حال می دانیم فرد عینکی است می خواهیم عضو کلاس B باشد.

$$P(B|\text{عینکی}) = \frac{P(B \cap \text{عینکی})}{P(\text{عینکی})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{25}{100}}{\frac{55}{400}} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

۳۰- دو پیشامد A و B در فضای S مستقل از هم هستند به طوریکه $P(A-B) = \frac{3}{10}$ و $P(A|B) = \frac{5}{10}$ ، مقدار $P(A \cup B)$

کدام است؟

$$\frac{9}{10} \quad (4)$$

$$\frac{7}{10} \quad (3)$$

$$\frac{8}{10} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

با توجه به اطلاعات داده شده و قوانین احتمال داریم:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{5}{10}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{10} - \frac{5}{10} P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{5} - \frac{5}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

